

数学月間(SGK)だより

谷 克彦

■米国の数学サークルという活動を、小林昭七先生から伺ったことがあります。やる気のある生徒に、数学への理解を深める機会を提供し、「数学とは、数学者になるとは」などの生徒の認識を広げるのを目的にしています。数学サークルでは、学校カリキュラムで扱わないような数学概念にふれることができます。数学サークルの活動は、学校の補習やテスト準備や競技の数学ではありません。さまざまな観点から数学を深く学びます。生徒は豊かな数学を知り、さまざまな数学に対処する意欲と能力が育ちます。これは、学校の数学カリキュラムの学習加速ではありません。

サークルのリーダーは通常プロの数学者(大学教授または大学院生)で、家族のボランティアも受け入れます。ワシントンDC・メトロエリアのFairfax 数学サークルを例にすると、以下の2つのグループがあります：

- ① グループ π ：代数1を修了した中学生。
- ② グループ e ：代数2を修了した高校生。

すべてのセッションはGeorge Mason 大学で行われ、秋に9回+春に9回、合計18回のセッションがあります(日曜日に実施され、会費は1家族あたり年100ドル)。

注) 近年、数学サークル(月1回)を補間する「数学の月曜日」という毎週活動も奨励されています。両親を含むボランティアが、多目的室や図書館などの公共スペースで昼食時に実施し、皆で数学を楽しみます。このとき使うゲームやパズルなどの教材が提供されています。

■1968年にレーガン宣言で始まった米国の数学月間MAMは、2017年から統計学が加わり、MSAM(Mathematics and Statistics Awareness Month: 数学と統計の意識向上月間)になりました。数理科学と統計学が、インターネットセキュリティ、持続可能性、病気、気候変動、ビッグ・データなどの現実の多くの問題で重要な役割を果

たしており、医学、製造、エネルギー、バイオテクノロジー、ビジネスなどの分野で応用発展がみられます。統計学が加わったのは、このような背景からで、2016年まで毎年決めていた数学月間の統一テーマはなくなりました。

米国の数学月間MSAMは、AMS(American Mathematical Society)、ASA(American Statistical Association)、MAA(Mathematical Association of America)、SIAM(Society for Industrial and Applied Mathematics)が協力したJPBM(Joint Policy Board for Mathematics)により運営されます。毎年4月に開催され、全国の大学、高校、研究所、数学クラブ、学生グループ、関連団体は、MSAMの活動を主催するように求められています。MSAMの活動形態は、ワークショップ、競技会、展示会、フェスティバル、講演会、シンポジウム、オープンハウス、数学の美術展、数学詩の朗読など多岐にわたります。

過去のテーマの資料や、毎年開発される教材資料は、JPBMウェブサイトで共有され、数学月間の運営に使われます。

■国民数学祭 National Math Festivalは、IAS(Institute for Advanced Study)およびMoMath(National Museum of Mathematics)と協力し、MSRI(Mathematical Sciences Research Institute)が開催しています。近年はこの国民数学祭が非常に活発です。2019年度国民数学祭は、5月4日(土)にワシントンDCと40州の科学博物館で実施され、あらゆる年齢層の2万人の数学愛好者を惹きつけました。そこでは地域の人々と、短編フィルム、ダンスと音楽の演奏、マジックショー、チームスポーツ、実践的なアート制作、パズル、ゲーム、デモなど「万象の背後にある数学を楽しむ参加型のイベント」が実施されました。種々の数学を入門から専門レベルまで学べるウェブサイトや、年齢・学年ごとに分類された教材が蓄積されたウェブサイトがあります。

特に、最近のウェブサイトの特徴は、本質的な内容を捉え可視化した優れた動画が充実していることです。最近の動画教材の例として、筆者好みの3Blue1Brownを紹介しましょう。

3Blue1Brownは、Grant Sandersonが作った

YouTube のチャンネルで、興味深い数学テーマを選び、表面的な解説ではなく本質を明らかにする見事な工夫があります。2019/01/13 に公開されて 225 万回以上視聴されています。

■物理現象に隠れている π (衝突回数を数える)

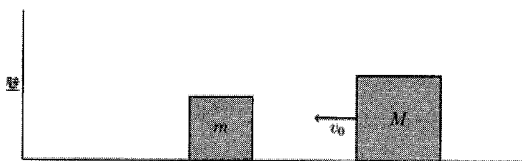


図 1

物体 m に物体 M ($M > m$) が衝突すると、物体 m は壁と物体 M に挟まれて衝突を繰り返します。何回衝突するのでしょうか？

$m = 1 \text{ kg}$ に固定し、 M を大きくしてみます。 $M = 1 \text{ kg}$ なら衝突回数は 3 回、 $M = 10^4 \text{ kg}$ なら、衝突回数は 314 回というように、 π を \sqrt{M} 倍して、その整数部分になるようです。なぜでしょうか？

物体 m は静止しており、物体 M は初速度 v_0 で摩擦のない台上を滑ります。 m, M はそれぞれの物体の質量 ($m < M$) で、左側は壁です。衝突はすべて弾性衝突とすると、エネルギー保存(1)と運動量保存(2)が成り立ちます。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 &= \frac{1}{2} M v_0^2 & (1) \\ M \Delta v_1 + m \Delta v_2 &= 0 & (2) \end{aligned} \right.$$

式(2)にある $\Delta v_1, \Delta v_2$ は、物体 M と物体 m の衝突の前後で起こる、それぞれの速度の変化です。物体 m の衝突相手が壁の場合にも同様な式が成り立ちますが、壁は動かずに、やはり弾性衝突ですから v_2 が符号を変えるのみです。

$v_3 \equiv v_2 \sqrt{\frac{m}{M}}$ の変数変換をすると、 v_1-v_3 平面ではエネルギー保存のグラフを半径 v_0 の円にできます。

$$v_1^2 + v_3^2 = v_0^2 \quad (1')$$

$$\Delta v_3 / \Delta v_1 = -\sqrt{\frac{M}{m}} \quad (2')$$

の衝突後に分配される速度変化の比は、それぞれの質量に反比例する(2)のですが、物体 m の速度 v_2 の変換量 v_3 に対しては、(2')のようにそれぞれの質量の平方根に反比例しています。

初速度 $v_1 = v_0$ の初期状態 (v_1 軸の左端 0) からスタートして、 v_1, v_3 の状態は次の衝突が起こるまで変化しませんが、最初の衝突後 v_1, v_3 の状態は $\frac{v_3}{v_1 - v_0} = -\sqrt{\frac{M}{m}}$ に従って変化します。このように衝突後の速度の状態は、エネルギー保存を満たす円周上の点を飛び飛びに移動します。

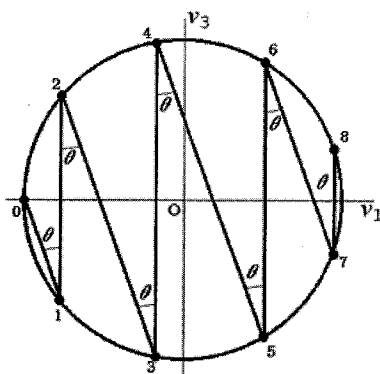


図 2

つまり、点 0 (初期状態) → 点 1 (m と M が最初の衝突後) → 点 2 (m が壁に衝突後) → 点 3 (m と M の 2 度目の衝突後) → …… と続きます。ただし、 $\tan \theta = \sqrt{\frac{m}{M}}$ の関係があり、図 2 に示したすべての円周角は θ で、中心角になおすと 2θ です。半円 π の中に中心角 2θ が最大 n 個取れるというのを $n = \lfloor \pi / 2\theta \rfloor$ と書くと、衝突回数

$$N = 2n = 2 \left\lfloor \pi / \left(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{m}{M}} \right) \right\rfloor$$

が得られます。 $m/M = 10^{-2p}$ とおくと、 M が大きくなると、 $N \rightarrow \pi \times 10^p$ の整数部分になります。

m/M	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}
N	3141	31415	314159	3141592

(たに・かつこ / SGK 世話人)